Μάθημα 11ο $\qquad$ 29/03/2018

Συνέχεια μιγαδικής συνάρτησης: $f: D \to \mathbb{C}$ στο $\alpha \in D$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D : |z-\alpha| < \delta : |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D, \ z_n \to \alpha : f(z_n) \to f(\alpha)$

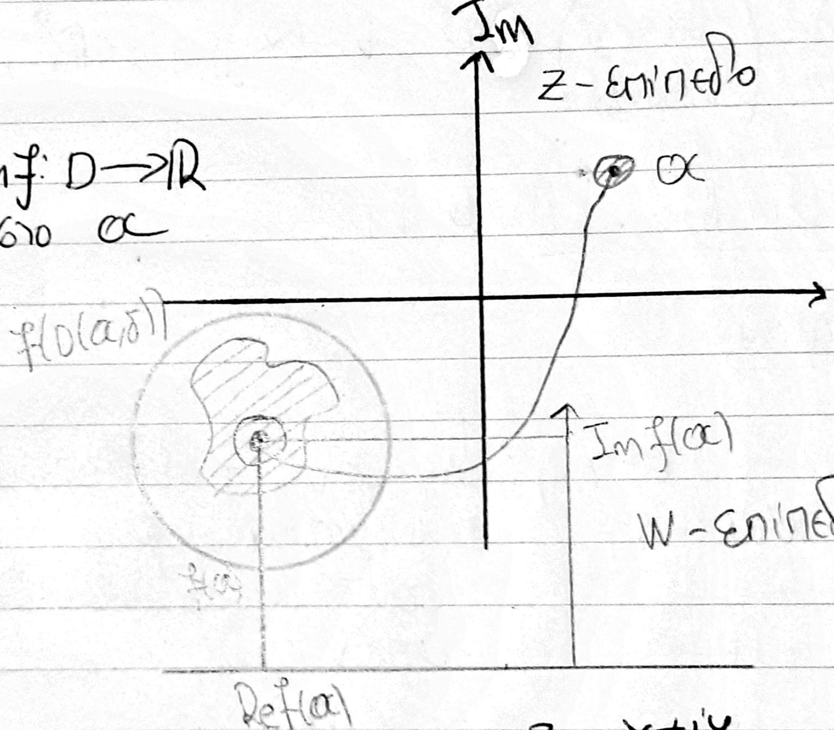
$\Leftrightarrow \lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$

↑ α σσ του D

(η «νορμάλ» κατάσταση)

$\Leftrightarrow \operatorname{Re} f: D \to \mathbb{R}, \ \operatorname{Im} f: D \to \mathbb{R}$

είναι συνεχής στο α



παράδειγμα

Η εκθετική συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $e^z = e^{x+iy} =$

$= e^x(\cos y + i \sin y)$ είναι συνεχής, αφού είναι συνεχείς

οι $\operatorname{Re} \exp(\underset{x+iy}{\underset{\shortparallel}{z}}) = e^x \cos y \ \left(= e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)\right)$ και

$\operatorname{Im} \exp(z) = e^x \sin y \ \left(= e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)\right)$

αφού οι $(x,y) \mapsto e^x \cos y \in \mathbb{R}$ συνεχής

$(x,y) \mapsto e^y \sin y \in \mathbb{R}$ συνεχής

« Ξυονάκι »

$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ συνεχής στο $x_0 + i y_0$

$\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ συνεχής στο (x_0, y_0)

$\Leftrightarrow$ $v(x,y)$ συνεχής στο (x_0, y_0)

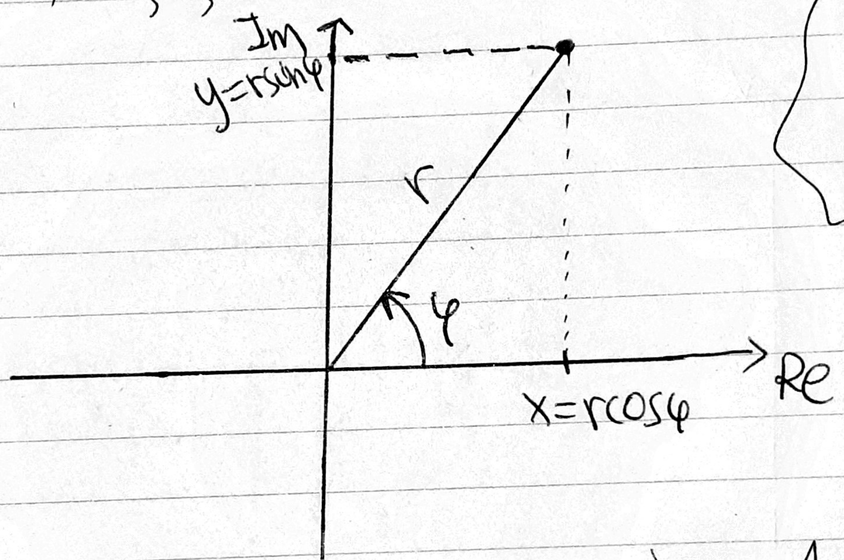
Ουσιαστικό Παράδειγμα

Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος

$$Arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}$$



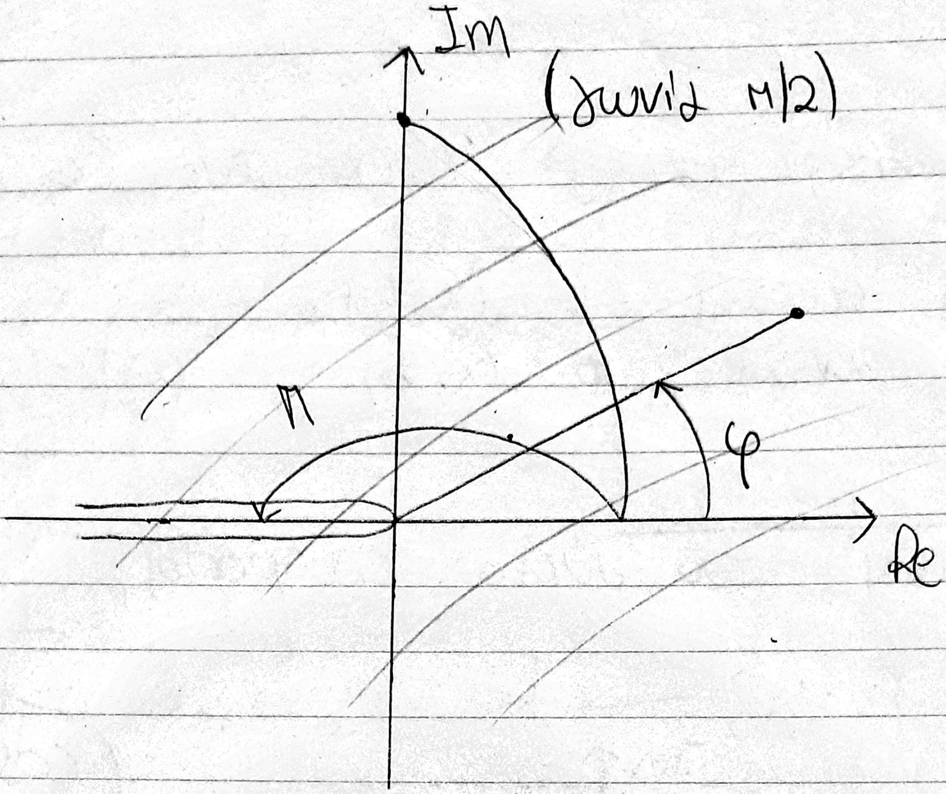
άρα, γεωμετρικά θα πούμε ότι $Arg := \phi$
αν $\phi \in (-\pi, \pi]$

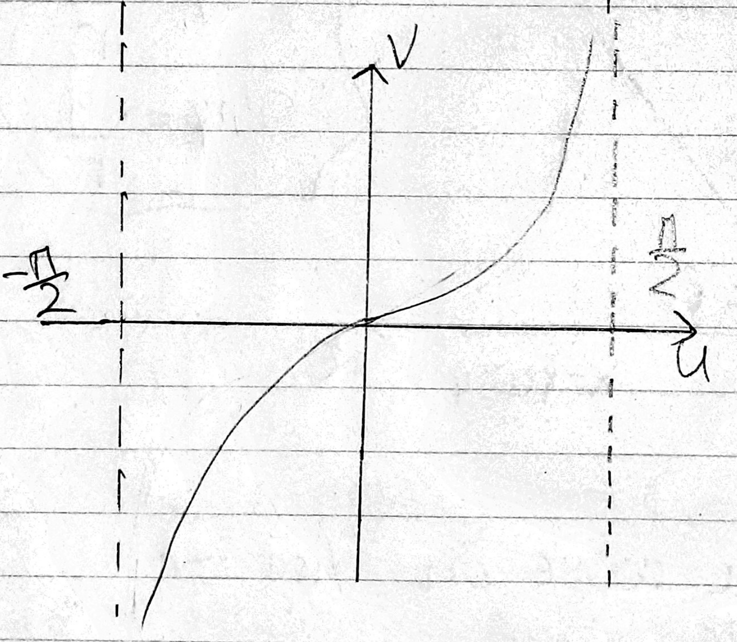
$$z = x + iy = (x \quad) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

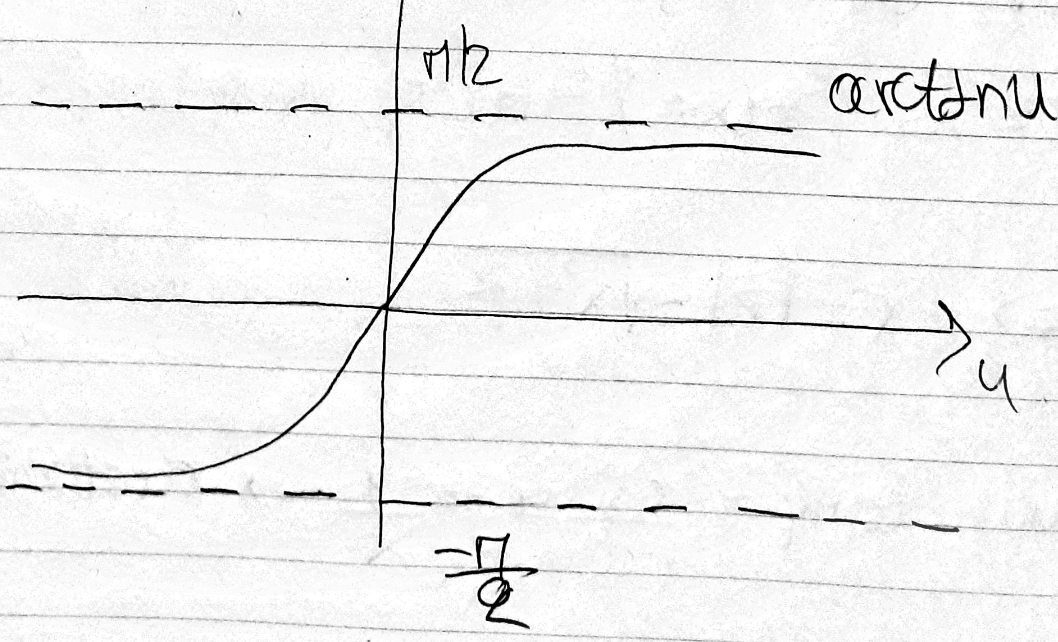
$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και $\tan\varphi = \dfrac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \arctan\dfrac{y}{x} = \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow Arg(x+iy) = \arctan\frac{y}{x} \quad \text{για } x, y > 0$$


Im
(γωνία π/2)
π
φ
Re


v
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
u


v
π/2
arctanu
u
$-\frac{\pi}{2}$

$$Arg(x+iy)=\begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0 \\ \pi/2, & x=0,\ y>0 \\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y\geq 0 \\ -\pi/2, & x=0,\ y<0 \\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0 \end{cases}$$

▶ Ως προς τη συνέχεια.

Από τη συνέχεια της $\arctan: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ προκύπτει ότι στο ανοιχτό δεξιά ημιεπίπεδο η Arg είναι συνεχής και το ίδιο στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο. Επίσης για $y_0>0$ και $z_n = x_n + iy_n \to iy_0$ ισχύει:

$$|Arg z_n - \underbrace{Arg(iy_n)}_{=\pi/2}| = \begin{cases} \left|\arctan\frac{y_n}{x_n} - \frac{\pi}{2}\right|, & x_n>0 \\ 0, & x_n=0 \\ \left|\pi+\arctan\frac{y_n}{x_n} - \frac{\pi}{2}\right|, & x_n<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi/2 - \arctan\frac{y_n}{|x_n|}, & x_n\neq 0 \\ 0, & x_n=0 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y_n}{\frac{1}{n}+|x_n|} \longrightarrow 0$$

για $y_n \to y_0 > 0$
για $|x_n| \to 0$

Άρα Arg συνεχής στο iy_0, $y_0>0$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η $Arg z = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$

είναι συνεχής στο iy_0, $y_0 < 0$
(και γι' αυτό το λόγο την ορίσαμε έτσι)

$\Rightarrow$ η $Arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι σίγουρα συνεχής.

Όμως για $x \pm i \frac{1}{n} \longrightarrow x$, $x<0$ $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

έχουμε $Arg\left(x + i\frac{1}{n}\right) = \pi + \arctan\frac{1}{nx} = \pi - \arctan\frac{1}{n|x|} \to \pi$

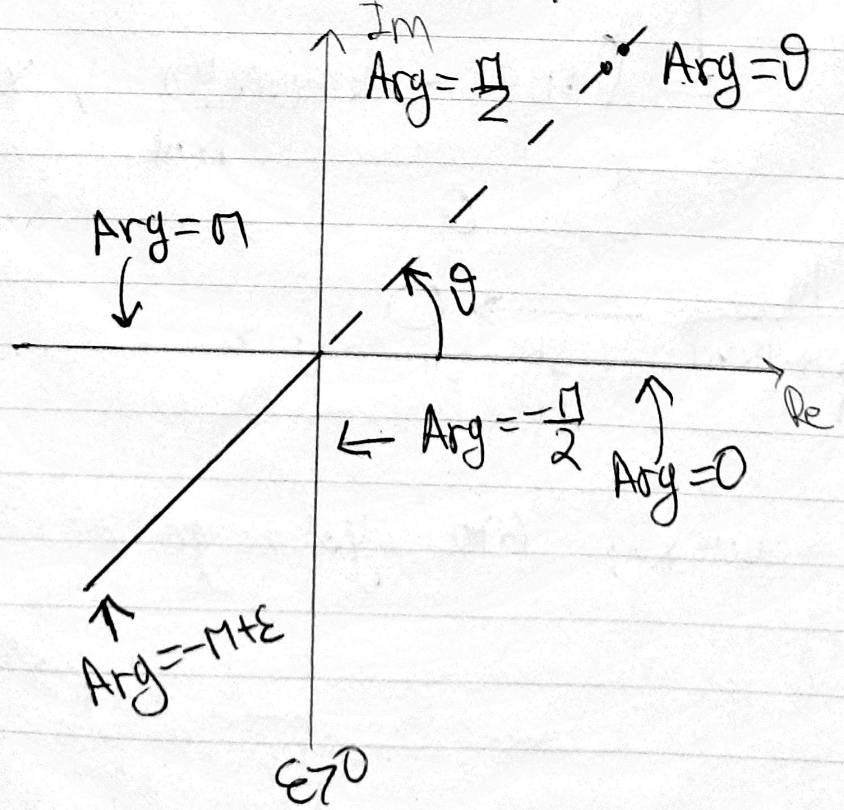
$Arg\left(x - i\frac{1}{n}\right) = -\pi + \arctan\left(-\frac{1}{nx}\right) = -\pi + \arctan\frac{1}{n|x|} \longrightarrow -\pi$

Δηλαδή για $x \in (-\infty, 0]$ η Arg είναι μη - συνεχής
Να προσεχθεί ότι έχαμε $Arg(\rho e^{i\theta}) = \theta$ για $\rho > 0$

$\theta \in (-\pi, \pi]$. Δηλαδή όλα τα σημεία

ημιευθείας $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho > 0\}$ με $\theta \in (-\pi, \pi]$

σταθερό έχουν σταθερή τιμή θ



▶ $\lim \mathrm{Arg}(\rho e^{i\theta}) = \theta \in (-\pi, \pi]$ → γι'αυτό το λόγο καλό είναι να μην ορίζουμε την τιμή Arg0 αλλά και αν την ορίσουμε η Arg θα είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

▶ Μπορούμε αν θέλουμε να επεκτείνουμε την Arg κατά συνεχή τρόπο πέρα από το $(-\infty, 0]$ αν ορίσουμε την

$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{Arg}\, z, & \mathrm{Im}\, z \geq 0 \\ \mathrm{Arg}\, z + 2\pi, & \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases} \quad \text{όταν } \mathrm{Re}\, z < 0$$

Τότε όμως θα έχουμε πρόβλημα ασυνέχειας στο $[0, +\infty)$ αν επεκτείνουμε την f συνεχώς στο $\mathrm{Re}\, z \geq 0$. Συνεπώς να βρούμε συνάρτηση (δηλ. μονότιμη απεικόνιση) ορίσματος που να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

Η λογαριθμική συνάρτηση $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow$

$\log(\underbrace{x+iy}_{=z}) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ενώ είναι ασυνεχής στο $(-\infty, 0]$ (βλέπε το φανταστικό μέρος της $\mathrm{Im} \log = \mathrm{Arg}$

$\mathrm{Im} \log z = \mathrm{Arg}\, z$

Ενώ το πραγματικό μέρος $\mathrm{Re} \log z = \ln|z|$
$\mathrm{Re} \log = \ln|\cdot|$)

Είναι συνεχές στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ως σύνθεση συνεχών
$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και
$\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση η λ δύναμης $(\lambda \in \mathbb{C})$

$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto z^{\lambda} = e^{\lambda \log z}$.

Είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και

ασυνεχής στο $(-\infty, 0]$ ως σύνθεση

συναρτήσεων $\log$, $z \longmapsto \lambda z$, $\exp$

Άσκηση: 1.0: $(\mathrm{Arg} z)$, $\mathrm{Im} z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$(\mathrm{Arg} z)$, δηλ. $(\mathrm{Arg} z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Είναι συνεχής